Über einige algebraische Formen, welche in der Theorie der Curven vom Geschlechte $p=0$ auftreten.

Von Dr. **B. Igel,**
Docent an der k. k. technischen Hochschule in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Jänner 1884.)

Die Resultate in meiner Arbeit:[1] „Über eine Classe von Abel'schen Gleichungen", veranlassten mich zu forschen, ob und in wie weit sich dieselben verallgemeinern liessen und, wenn ich auch bis nun dieses Ziel noch nicht erreichte, so gelang es mir doch nach anderer Richtung hin interessante Resultate zu erlangen. Man weiss, dass die Methoden der modernen Algebra oft in der Theorie der Gleichungen (höhere Algebra) mit grossem Erfolge verwendet wurden, ebenso ist bekannt, dass umgekehrt häufig die Methoden der höheren Algebra angewendet werden, um die Natur von algebraischen Formen zu erforschen. In der vorliegenden Arbeit werden nun eben solche Methoden angewendet, um gewisse algebraische Formen, welche in der Theorie der Curven vom Geschlechte $p=0$ auftreten, zu studiren. Dabei konnte ich nicht umhin, diejenigen Resultate in der oben erwähnten Arbeit, auf welche sich die vorliegenden Betrachtungen stützen, hier zu reproduciren, zumal dieselben hier durch eine Bemerkung ergänzt werden, auf die es hier ganz besonders ankommt.

§. 1.

Es seien drei ganze rationale Functionen

$$f_1(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \quad + a_{n-1} x + a_n$$
$$f_2(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \quad + b_{n-1} x + b_n$$
$$f_3(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \quad + c_{n-1} x + c_n$$

[1] Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften, Bd. XLV

ohne gemeinschaftlichen Theiler gegeben. Wir setzen für die Folge fest, dass die Wurzeln der Gleichungen

$$f_1 = 0 \qquad f_2 = 0 \qquad f_3 = 0$$

bezüglich durch folgende Buchstaben bezeichnet werden:

$$a, b, c, \ldots i$$
$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{i}$$
$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots \iota.$$

Stellen wir uns die Aufgabe, diejenigen Werthe von λ zu bestimmen, für welche die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = 0 \\ f_2 + \lambda f_3 = 0 \end{array}\right\} \qquad 1)$$

zugleich bestehen, so erhalten wir als Bedingung hierfür, indem wir x aus diesen Gleichungen eliminiren, eine Gleichung in λ

$$R\,\{f_1,\ f_2 + \lambda f_3\} = 0, \qquad 2)$$

wo wir unter diesem Symbole die Resultante der Gleichungen 1) verstehen.

Da die Gleichung 2) offenbar vom n^{ten} Grade in λ ist, so erhalten wir n Werthe von λ und demgemäss die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} f_2 + \lambda_1 f_3 = 0 \\ f_2 + \lambda_2 f_3 = 0 \\ \quad\vdots \\ f_2 + \lambda_n f_3 = 0 \end{array}\right\} \qquad 3)$$

von denen jede eine gemeinschaftliche Wurzel mit $f_1 = 0$ hat.

Da ferner die Wurzeln der Gleichungen 2) resp. den folgenden Verhältnissen gleich sind:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = -f_2(a) : f_3(a) \\ \lambda_2 = -f_2(b) : f_3(b) \\ \\ \lambda_n = -f_2(i) : f_3(i) \end{array}\right\}, \qquad 4)$$

so kann die Gleichung 2) als diejenige Gleichung aufgefasst werden, deren Wurzeln rationale Functionen der Wurzeln der Gleichung $f_1 = 0$ sind.

Setzt man in den Gleichungen 3) die λ-Werthe aus 4) ein, so dass sie die Form annehmen

$$\left.\begin{array}{l} f_2(x) f_3(a) - f_2(a) f_3(x) = 0 \\ f_2(x) f_3(b) - f_2(b) f_3(x) = 0 \\ \\ f_2(x) f_3(i) - f_2(i) f_3(x) = 0 \end{array}\right\}, \qquad 5)$$

so hat jede dieser Gleichungen nebst der mit $f_1 = 0$ gemeinschaftlichen Wurzel noch $\overline{n-1}$ Wurzeln, von denen jede eine Function jener Wurzel ist. Es entsprechen demnach jeder Wurzel von $f_1 = 0$ $\overline{n-1}$ Wurzeln, die mit ihr durch eine Gleichung verknüpft sind. Dass sich jene Wurzel rational durch jede der mit ihr durch eine Gleichung verknüpften Wurzeln ausdrücken lassen müsse, ist klar, und ich will nun zeigen, wie dies geschieht.

Es ist offenbar, dass die Resultante

$$R\,\{f_1,\ f_2 + \lambda f_3\}$$

in das Product

$$(f_2 + \lambda_1 f_3)\,(f_2 + \lambda_2 f_3) \cdot\ \cdot (f_2 + \lambda_n f_3)$$

übergeht, wenn man in ihr

$$\lambda = -f_2 : f_3$$

setzt. Und da jeder der Factoren einen linearen Factor von $f_1(x)$ enthält, so muss

$$R\{f_1, f_2+\lambda f_3\}_{\lambda=-f_2:f_3}$$

die Form haben:

$$f_3^n R\{f_1, f_2+\lambda f_3\}_{\lambda=-f_2:f_3} = \psi_1(x) \cdot f_1(x).$$

Es handelt sich darum, die Form ψ zu eruiren. Zu diesem Zwecke führe ich folgende Bezeichnung ein:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \quad + a_n x^n = A^x \\
f_2(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \quad + b_n x^n = B^x \\
f_3(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \quad + c_n x^n = C^x \\
f_1(y) &= a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \quad + a_n y^n = A^y \\
f_2(y) &= b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \quad + b_n y^n = B^y \\
f_3(y) &= c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \quad + c_n y^n = C^y
\end{aligned}$$

so dass die Gleichungen 3) folgende Gestalt haben:

$$\begin{vmatrix} B^x & C^x \\ B^a & C^a \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} B^x & C^x \\ B^b & C^b \end{vmatrix} = 0, \ldots \begin{vmatrix} B^x & C^x \\ B^i & C^i \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Wie man leicht sieht, hat ψ die Form

$$\psi = \frac{1}{(x-a)(x-b). \quad .(x-c)} \begin{vmatrix} B^x & C^x \\ B^a & C^a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B^x & C^x \\ B^b & C^b \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} B^x & C^x \\ B^i & C^i \end{vmatrix},$$

oder auch, wie eine leichte Umformung zeigt,

$$\psi = \begin{vmatrix} B^x & \dfrac{B^a - B^x}{a-x} \\ C^x & \dfrac{C^a - C^x}{a-x} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B^x & \dfrac{B^b - B^x}{b-x} \\ C^x & \dfrac{C^b - C^x}{b-x} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} B^x & \dfrac{B^c - B^x}{c-x} \\ C^x & \dfrac{C^i - C^x}{i-x} \end{vmatrix}.$$

Setzt man

$$\chi = \begin{vmatrix} B^x & \dfrac{B^y - B^x}{y-x} \\ C^x & \dfrac{C^y - C^x}{y-x} \end{vmatrix}, \tag{7}$$

so sieht man, dass ψ aus χ entsteht, indem man in χ für y successive alle Wurzeln von $f_1 = 0$ setzt und die Resultate mit einander multiplicirt, d. h. dass ψ die Resultante von $f_1(y)$ und χ ist.

Nun ist, wenn man χ entwickelt,

$$\chi = (B_{00}\, C_{1n}) + (B_{01}\, C_{2n})\, y + (B_{02}\, C_{3n})\, y^2 + \quad + (B_{0n-1}\, C_{nm})\, y^{n-1},$$

wo

$$B_{ik} = b_i + b_{i+1}\, x + \quad + b_k\, x^{i-k}$$
$$C_{ik} = c_i + c_{i+1}\, x + \quad + c_k\, x^{i-k}$$

und

$$(B_{ik}\, C_{nm}) = B_{ik}\, C_{nm} - B_{nm}\, C_{ik},$$

folglich ist

$$\psi = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & a_n & & & \\ & a_0 & \cdot & \cdot & a_{n-1} & a_n & & \\ & & & & & & & \\ & & & a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & a_n \\ (B_{00}\, C_{1n}), & B_{01}\, C_{2n}) & \cdot & \cdot & (B_{0n-1}\, C_{nm}) & & & \\ & & & & & & & \cdot \\ & & & (B_{00}\, C_{1n}) & \cdot & \cdot & & (B_{0n-1}\, C_{nm}) \end{vmatrix}. \qquad 8)$$

$\psi = 0$ gibt nun die Werthe von χ, die zusammen mit den Wurzeln von $f_1 = 0$ die Werthepaare liefern, für welche

$$\chi = 0$$

wird, und wir erhalten die Wurzeln von $f_1 = 0$ als rationale Functionen der Wurzeln der Gleichungen 3) ausgedrückt.

Wenn man diese rationale Function, wie es weiter unten immer geschieht, mit Θ bezeichnet, so ist Θ der Quotient zweier Unterdeterminanten der Determinante ψ

$$\Theta = \Theta' : \Theta''.$$

Da ψ vom Grade $n(n-1)$ ist, so sind sowohl Zähler wie Nenner von Θ vom Grade $(n-1)^2$.

Die Gleichungen 1), 2) und 3) lassen sich geometrisch interpretiren.

Bekanntlich lässt sich jede Curve vom Geschlechte $p=0$, d. h. jede Curve mit

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Doppel- und Rückkehrpunkten durch eine eindeutige Transformation auf die Form

$$\left.\begin{aligned}\chi_1 &= f_1(\lambda\mu)\\ \chi_2 &= f_2(\lambda\mu)\\ \chi_3 &= f_3(\lambda\mu)\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

bringen, wo f_1, f_2, f_3 ganze homogene Functionen n^{ter} Ordnung in λ und μ sind. Die Gleichung der Curve 9) erhält man bekanntlich durch Elimination von λ, μ aus dem Systeme

$$\left.\begin{aligned}u_1f_1+u_2f_2+u_3f_3 &= 0\\ v_1f_1+v_2f_2+v_3f_3 &= 0\end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

Diese Resultante enthält die Grössen u, v nur in den Verbindungen

$$\begin{gathered}u_2v_3-u_3v_2\\ u_3v_1-u_1v_3\\ u_1v_2-u_2v_1\end{gathered}$$

und ist eine Form n^{ter} Ordnung der letzteren.

Ersetzt man dieselben durch f_1, f_2, f_3, so entsteht die Gleichung n^{ter} Ordnung

$$F(f_1f_2f_3)=0, \tag{11}$$

welche die Gleichung der Curve ist.

Die Resultante 2) wird offenbar auch aus den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} u_1 f_1 &= 0 \\ v_1 f_1 + v_2 f_2 + v_3 f_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad 12)$$

erhalten, daraus folgt, dass sie auch aus der Resultante

$$F(f_1 f_2 f_3) = 0$$

erhalten wird, wenn man in dieser $f_1 = 0$ setzt.

Der Ausdruck, den man erhält, wenn man in der Gleichung einer Curve eine trimetrische Coordinate gleich Null setzt, stellt bekanntlich die Verbindungslinien der Punkte, in denen die entsprechende Fundamentallinie die Curve schneidet, mit der gegenüberliegenden Ecke des Fundamentaldreieckes dar; und da die Resultante 2) der restliche Ausdruck von $F(f_1 f_2 f_3)$ ist, wenn man in dieser $f_1 = 0$ setzt, so stellt sie eben die Verbindungslinien des Punktes $f_2 = 0$ $f_3 = 0$ mit den Punkten, in welchen $F(f_1 f_2 f_3) = 0$ die Seite $f_1 = 0$ schneidet.

Setzt man in der Resultante 2)

$$\lambda = -f_2 : f_3,$$

so besteht sie offenbar aus den Producten der Gleichungen 3), folglich stellt jede dieser Gleichungen eine solche Verbindungslinie dar. Die Schnittpunkte dieser Linien mit der Curve sind offenbar durch die Wurzeln der Gleichungen 3) gegeben.

Diese geometrische Interpretation der Wurzeln der Gleichungen 3) ist für das Folgende von grosser Wichtigkeit.

§. 2.

Für drei Functionen zweiten Grades

$$\begin{aligned} f_1(x) &= a_0 x^2 + a_1 x + a_2 \\ f_2(x) &= b_0 x^2 + b_1 x + b_2 \\ f_3(x) &= c_0 x^2 + c_1 x + c_2 \end{aligned}$$

bestehen nach §. 1 folgende Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} f_3^2 R\{f_1, f_2+\lambda f_3\}_{\lambda=-f_2:f_3} &= \psi_1(x)\cdot f_1(x) \\ f_1^2 R\{f_2. f_3+\lambda f_1\}_{\lambda=-f_3:f_1} &= \psi_2(x)\cdot f_2(x) \\ f_2^2 R\{f_3, f_1+\lambda f_2\}_{\lambda=-f_1:f_2} &= \psi_3(x)\cdot f_3(x) \end{aligned}\right\}, \tag{13}$$

wo ψ_1, ψ_2, ψ_3 folgende Formen bedeuten

$$\psi_1 = R(\chi_1 f_1)$$
$$\psi_2 = R(\chi_2 f_2)$$
$$\psi_3 = R(\chi_3 f_3)$$

wenn unter χ_1, χ_2, χ_3 folgende Functionen verstanden werden

$$\chi_1 = \frac{f_2(x)f_3(y)-f_2(y)f_3(x)}{x-y} = \{(10)_{23}x+(20)_{23}\}\,y + \{(20)_{23}x+(21)_{23}\}$$

$$\chi_2 = \frac{f_3(x)f_1(y)-f_3(y)f_1(x)}{x-y} = \{(10)_{31}x+(20)_{31}\}\,y + \{(20)_{31}x+(21)_{31}\}$$

$$\chi_3 = \frac{f_1(x)f_2(y)-f_1(y)f_2(x)}{x-y} = \{(10)_{12}x+(20)_{12}\}\,y + \{(20)_{12}x+(21)_{12}\}.$$

Die ψ_ι lassen sich, wie ich an einer anderen[1] Stelle gezeigt habe, in folgender Weise darstellen:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= R(\chi_1 f_1) = \tfrac{1}{2}R_{123}\cdot J_{23} + R(f_2 f_3)\cdot f_1 \\ \psi_2 &= R(\chi_2 f_2) = \tfrac{1}{2}R_{123}\cdot J_{31} + R(f_3 f_1)\cdot f_2 \\ \psi_3 &= R(\chi_3 f_3) = \tfrac{1}{2}R_{123}\cdot J_{12} + R(f_1 f_2)\cdot f_3 \end{aligned}\right\}, \tag{14}$$

wobei in der üblichen Weise durch $J_{\iota k}$ die Jacobi'sche Determinante der Formen f_ι und f_k und durch R_{123} die simultane Invariante der drei binären Formen bezeichnet ist.

[1] Über ein Princip zur Erzeugung von Covarianten. Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften, Bd. XLVI.

Nach §. 1 stehen die f_ι mit den ihnen entsprechenden ψ_ι in der Beziehung, dass die Verschwindungselemente der ersteren rationale Functionen derjenigen der letzteren sind; da nun die Gleichungen bestehen

$$\left.\begin{aligned} R\{\psi_1, f_2+\lambda f_3\} &= C_1 . R\{f_1, f_2+\lambda f_3\} \\ R\{\psi_2, f_3+\lambda f_1\} &= C_2 . R\{f_2, f_3+\lambda f_1\} \\ R\{\psi_3, f_1+\lambda f_2\} &= C_3 . R\{f_3, f_1+\lambda f_2\} \end{aligned}\right\} \qquad 15)$$

und desshalb auch die folgenden

$$\left.\begin{aligned} R\{\psi_1, f_2+\lambda f_3\}_{\lambda=-f_2:f_3} &= C_1 . R\{f_1, f_2+\lambda f_3\}_{\lambda=-f_2:f_3} \\ R\{\psi_2, f_3+\lambda f_1\}_{\lambda=-f_3:f_1} &= C_2 . R\{f_2, f_3+\lambda f_1\}_{\lambda=-f_3:f_1} \\ R\{\psi_3, f_1+\lambda f_2\}_{\lambda=-f_1:f_2} &= C_3 . R\{f_3, f_1+\lambda f_2\}_{\lambda=-f_1:f_2} \end{aligned}\right\}, \qquad 16)$$

so sind auch die Nullwerthe der ψ_ι rationale Functionen derjenigen der f_ι. Aus den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \{(10)_{23}\,x+(20)_{23}\}\,y+\{(20)_{23}\,x+(21)_{23}\} = 0 \\ \chi_2 &= \{(10)_{31}\,x+(20)_{31}\}\,y+\{(20)_{31}\,x+(21)_{31}\} = 0 \\ \chi_3 &= \{(10)_{12}\,x+(20)_{12}\}\,y+\{(20)_{12}\,x+(21)_{12}\} = 0, \end{aligned}$$

welche die Beziehungen zwischen den Wurzeln der f_ι und ψ_ι angeben, sieht man leicht, dass die rationalen Functionen, durch welche sich die Wurzeln zweier entsprechenden Gleichungen ausdrücken lassen, dieselben sind.

Machen wir jetzt die Functionen f_ι sowohl, als auch die ψ_ι homogen, so folgt, dass $\psi_\iota(x_1 x_2)$ aus $f_\iota(y_1 y_2)$ durch die Substitution

$$\begin{aligned} y_1 &= -\{(20)_{k\lambda}\,x_1+(21)_{k\lambda}\,x_2\} \\ y_2 &= \{(10)_{k\lambda}\,x_1+(20)_{k\lambda}\,x_2\} \end{aligned}$$

hervorgeht, und dass auch umgekehrt $f_\iota(y_1 y_2)$, von einem constanten Factor abgesehen, der sich aus 14) in der Form

$$C_\iota = R^2(f_k f_\lambda)$$

ergibt, aus $\psi_i(x_1 x_2)$ entsteht, wenn man in derselben

$$x_1 = -\{(20)_{k\lambda}\, y_1 + (21)_{k\lambda}\, y_2\}$$
$$x_2 = \{(10)_{k\lambda}\, y_1 + (20)_{k\lambda}\, y_2\}$$

setzt.

Weil die Formen ψ_ι aus den f_ι durch lineare Substitutionen hervorgehen, so müssen die Hesse'schen Determinanten der ψ_ι denen der f_ι bis auf constanten Factoren gleich sein. Dies verificirt man leicht aus den Formen der ψ_ι in 14), denn es ist z. B.

$$H(\psi_1) = \tfrac{1}{4} R_{123} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 J_{23}}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 J_{23}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 J_{23}}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 J_{23}}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} + \tfrac{1}{2} R_{123} \,.\, R(f_2 f_3) \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 J_{23}}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 J_{23}}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 J_{23}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 J_{23}}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} \right) + R^2(f_2 f_3) \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} \end{vmatrix} \qquad 17)$$

$$= R_{123} \,.\, (J_{23} J'_{23})^2 + \tfrac{1}{2} R_{123} \,.\, R(f_2 f_3) \,.\, (J_{23} f_1)^2 + R^2 (f_2 f_3) \,.\, (H f_1).$$

Berücksichtigt man die bekannte Relation

$$R(f_2 f_3) = -2 (J_{23} J'_{23})^2,$$

so erhält man

$$H(\psi_1) = R^2(f_2 f_3) \,.\, H(f_1). \qquad 18)$$

Wir erhalten daher folgendes Resultat:

Zu drei binären quadratischen Formen gehören immer drei entsprechende Formen mit denselben Discriminanten und von der Beschaffenheit, dass die Wurzeln zweier entsprechender Formen sich gegenseitig durch dieselbe rationale Function ausdrücken lassen.

Multiplicirt man die Gleichungen 14) resp. mit f_1, f_2, f_3 und addirt dieselben, so erhält man, da bekanntlich

$$f_1 J_{23} + f_2 J_{31} + f_3 J_{12} = 0$$

ist, die interessante Relation

$$\begin{aligned} & R(\chi_1 f_1) \cdot f_1 + R(\chi_2 f_2) \cdot f_2 + R(\chi_3 f_3) \cdot f_3 \\ & = R(f_2 f_3) \cdot f_1^2 + R(f_3 f_1) \cdot f_2^2 + R(f_1 f_2) \cdot f_3^2. \end{aligned} \tag{19}$$

Nach einem Satze des Herrn Brill[1] lässt sich immer zu drei binären quadratischen Formen eine vierte so finden, dass zwischen den Quadraten der vier Formen eine lineare Relation besteht. Ist nun diese vierte Form mit f_4 bezeichnet, so ist die Relation

$$\alpha_0 f_1^2 + \alpha_1 f_2^2 + \alpha_3 f_3^2 + \alpha_4 f_4^2 = 0, \tag{20}$$

wo die α aus den Invarianten der drei Formen in der von Herrn Brill angegebenen Weise zusammengesetzt sind. Bezeichnet man der Kürze wegen die Resultanten $R(f_2 f_3)$, $R(f_3 f_1)$, $R(f_1 f_2)$ mit A_0, A_1, A_2 und den Ausdruck auf der linken Seite von 19) mit $\mu(x)$, combinirt ferner 19) mit 20), so sieht man, dass $\mu(x)$ sich auf vier Arten durch Summen von Quadraten ausdrücken lässt:

$$\left.\begin{aligned} \mu(x) &= A_0 f_1^2 + A_0 f_2^2 + A_2 f_3^2 + 0 \\ \alpha_0 \mu(x) &= 0 + (01) f_2^2 + (02) f_3^2 - \alpha_3 A_0 f_4^2 \\ \alpha_1 \mu(x) &= (10) f_1^2 + 0 + (12) f_3^2 - \alpha_3 A_1 f_4^2 \\ \alpha_2 \mu(x) &= (20) f_1^2 + (21) f_2^2 + 0 - \alpha_3 A_2 f_4^2 \end{aligned}\right\}, \tag{21}$$

wobei $(\iota k) = (\alpha_\iota A_k - \alpha_k A_\iota)$ ist.

Die Determinante

$$D = \left|\begin{matrix} A_0 & A_1 & A_2 & 0 \\ 0 & (01) & (02) & A_0 \\ (10) & 0 & (12) & A_1 \\ (20) & (21) & 0 & A_2 \end{matrix}\right| \tag{22}$$

---

[1] Siehe Mathematische Annalen, Bd. XX, pag. 352.

muss nothwendiger Weise identisch verschwinden, denn wäre dies nicht der Fall, so würde man aus 21) schliessen können, dass das Quadrat einer jeden Form f_ι durch $\mu(x)$ multiplicirt mit einem constanten Factor ausdrückbar sei, was eine Ungereimtheit wäre.

Dies lässt sich übrigens sehr leicht durch Rechnung zeigen. Nach einem bekannten Satze ist nämlich

$$D = \begin{vmatrix} A_0 & (01) & (02) \\ A_1 & 0 & (12) \\ A_2 & (21) & 0 \end{vmatrix}^2, \text{ da}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & (01) & (02) \\ (10) & 0 & (12) \\ (20) & (21) & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ ist.}$$

Führt man in 22) die wirklichen Werthe der A_ι und der α_ι ein, so ist

$$D = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{22}d_{12}d_{13}D_{23} - d_{11}d_{12}d_{23}d_{31}, & d_{33}d_{12}d_{13}D_{23} - d_{11}d_{12}d_{23}D_{12} \\ d_{22} & 0 & d_{33}d_{12}d_{23}D_{31} - d_{22}d_{13}d_{23}D_{12} \\ d_{33} & d_{22}d_{13}d_{23}D_{12} - d_{33}d_{12}d_{23}D_{31}, & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12}d_{13}D_{23} & d_{12}d_{13}D_{23} \\ d_{22} & d_{12}d_{23}D_{31} & d_{12}d_{23}D_{31} \\ d_{33} & d_{23}d_{13}D_{12} & d_{13}d_{23}D_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

§. 3.

Wenn wir zu einem System von drei Formen n^{ter} Ordnung übergehen, und für diese die in §. 2 gebildeten Formen herstellen, so gehen zum Theil analoge und zum Theil ganz neue Formen hervor.

Bezeichnen wir mit ψ_1, ψ_1', ψ_1'' die Functionen

$$\psi_1 = R(\chi_1 f_1)$$
$$\psi_1' = R(\chi_2 f_2)$$
$$\psi_1'' = R(\chi_3 f_3)$$

und sind

$$y = \Theta_1(x) = \Theta_1'(x) : \Theta_1''(x)$$
$$y = \pi_1(x) = \pi_1'(x) \quad \pi_1''(x)$$
$$y = \pi_2(x) = \pi_2'(x) : \pi_2''(x)$$

die Relationen, welche zwischen den Nullwerthen der f_i mit ψ_i bestehen, so ist

$$\left.\begin{aligned} R\{\psi_1\ , f_2 + \lambda f_3\} &= [R\{f_1, f_2 + \lambda f_3\}]^{n(n-1)} \\ R\{\psi_1\ , f_3 + \lambda f_1\} &= [R\{f_2, f_3 + \lambda f_1\}]^{n(n-1)} \\ R\{\psi_1'', f_1 + \lambda f_2\} &= [R\{f_3, f_1 + \lambda f_2\}]^{n(n-1)} \end{aligned}\right\}, \qquad 23)$$

$$\left.\begin{aligned} R\{\psi_1 \quad \Theta_1' + \lambda\Theta_1''\} &= f_1(\lambda)^{n(n-1)} \\ R\{\psi_1', \quad \pi_1' + \lambda\pi_1''\} &= f_2(\lambda)^{n(n-1)} \\ R\{\psi_1'', \quad \pi_2' + \lambda\pi_2''\} &= f_3(\lambda)^{n(n-1)} \end{aligned}\right\}, \qquad 24)$$

$$\left.\begin{aligned} R\{f_1(y), \Theta_1'(x) + y\Theta_1''(x)\} &= \Theta_1''(x) . f_1(\Theta_1) = \varphi_1\ (x) . \psi_1\ (x) \\ R\{f_2(y), \pi_1'(x) + y\pi_1''(x)\} &= \pi_1''(x) . f_2(\pi_1) = \varphi_1'(x) . \psi_1'(x) \\ R\{f_3(y), \pi_2'(x) + y\pi_2''(x)\} &= \pi_2''(x) . f_3(\pi_2) = \varphi_1''(x) . \psi_1''(x) \end{aligned}\right\}. \qquad 25)$$

Die Formen φ, welche hier neu auftreten und zu den f_i in demselben Verhältnisse wie die ψ stehen, wollen wir, der Kürze wegen, die den ψ zugehörigen Formen nennen. Von ihnen werden wir nachher zeigen, dass sie sich gleich den ψ in Determinantenform darstellen lassen.

Bilden wir ferner folgende Formen:

$$\left.\begin{aligned} R\{f_1(x), \Theta_1'(x) + \lambda\Theta_1''(x)\} &= F_2\ (\lambda) \\ R\{f_2(x), \pi_1'(x) + \lambda\pi_1''(x)\} &= F_2'(\lambda) \\ R\{f_3(x), \pi_2'(x) + \lambda\pi_2''(x)\} &= F_2''(\lambda) \end{aligned}\right\}, \qquad 26)$$

so sind dies wiederum neue Formen und ihre Nullwerthe sind resp.

$$\Theta_1(a), \Theta_1(b) . \quad . \Theta_1(i)$$
$$\pi_1(\mathfrak{a}), \pi_1(\mathfrak{b}) . \quad . \pi_1(\mathfrak{i})$$
$$\pi_2(\alpha), \pi_2(\beta) . \quad . \pi_2(\iota).$$

Dass die F nicht in die f übergehen können, ersieht man daraus, dass z. B. $\Theta_1(a) = b$ eine Beziehung zwischen den Wurzeln von f voraussetzen würde, was von vornherein ausgeschlossen ist, und dass aus $\Theta_1(a) = a$ folgen würde, a sei eine Wurzel einer Gleichung $(n-1)^{ten}$ Grades und somit $f_1 = 0$ reducibel, was gegen die Voraussetzung ist.

Den n Wurzeln von $F_2 = 0$ entsprechen n Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \Theta_1'(x)\Theta_1''(a) - \Theta_1'(a)\Theta_1''(x) = 0 \\ \Theta_1'(x)\Theta_1''(b) - \Theta_1'(b)\Theta_1''(x) = 0 \\ \\ \Theta_1'(x)\Theta_1''(i) - \Theta_1'(i)\Theta_1''(x) = 0 \end{array}\right\}. \qquad 27)$$

Das Product dieser Gleichungen ist, wenn man f_1 absondert, eine Function $n(n-1)^2$ Grades, welche wir mit ψ_2 bezeichnen und als Resultante definiren

$$\psi_2(x) = R\left\{f_1(y), \frac{\Theta_1'(x)\Theta_1''(y) - \Theta_1'(y)\Theta_1''(x)}{x-y}\right\}$$

Zwischen den Wurzeln von $f_1 = 0$, $\psi_2 = 0$ besteht offenbar die Relation

$$y = \Theta_2(x).$$

Dass $\Theta_2(x)$ nicht gleich $\Theta_1(x)$ sein kann, ist daraus ersichtlich, dass im entgegengesetzten Falle

$$\Theta_1(a) = \Theta_1(\alpha) = a$$

folgen würde, was nicht möglich ist.

Verfährt man in dieser Weise weiter, so erhält man folgendes Schema von Formen

$$\left.\begin{array}{lll} R\{f_1, f_2 & + \lambda f_3\} & = F_1(\lambda),\ \psi_1(x),\ \varphi_1(x),\ \Theta_1(x) \\ R\{f_1, \Theta_1' & + \lambda\Theta_1''\} & = F_2(\lambda),\ \psi_2(x),\ \varphi_2(x),\ \Theta_2(x) \\ & & \quad\cdot\ \cdot \\ R\{f_1, \Theta'_{m-1}(x) & + \lambda\Theta''_{m-1}(x)\} & = F_m(\lambda),\ \psi_m(x),\ \varphi_m(x),\ \Theta_m(x) \\ & & \quad\cdot\ \cdot \\ R\{f_1, \Theta'_{n-1}(x) & + \lambda\Theta''_{n-1}(x)\} & = F_n(\lambda),\ \psi_n(x),\ \varphi_n(x),\ \Theta_n(x) \\ & & \quad\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\}. 28)$$

Die Ordnungen der F, ψ, φ sind, wie man leicht einsieht, folgende:

$$\text{Ordnung von } F_1 = n \text{ von } \psi_1 = n\,(n-1) \text{ von } \varphi_1 = n\,(n-1)\,(n-2)$$
$$\cdot F_2 = n \qquad \psi_2 = n(n-1)^2 \qquad \varphi_2 = n(n-1)^3$$

Auf die Frage, ob das obige Schema irgendwo abbricht oder nicht, werden wir später zurückkommen und wollen jetzt nur die Bedingung angeben, die stattfinden muss, wenn das Schema abbricht. Da wir oben gesehen haben, dass Θ_i und Θ_{i-1} nicht gleich sein können, so kann das Schema nur dann abbrechen, wenn

$$\Theta_\mu(x) = \Theta_\nu(x),$$

wo $\mu > \nu + 1$. Ist diese Bedingung erfüllt, dann muss offenbar entweder ψ_μ eine vollständige Potenz von ψ_ν sein oder aber in ψ_ν und φ_ν zerfallen.

Um nun nachzuweisen, dass die Formen φ_ι sich, gleich den ψ_ι, in Determinantenform darstellen lassen, gehen wir von einer anderen Auffassung des Verhältnisses zwischen den Formen f, ψ, φ aus. Im Vorgehenden haben wir dasselbe rein algebraisch aufgefasst. Wir wollen es jetzt vom substitutions-theoretischen Gesichtspunkte betrachten.

Die Gruppen der Gleichungen $\psi_\iota = 0$ sind imprimitiv, denn diese sind vom Grade $n \cdot \nu$ und entstehen durch Elimination von y aus zwei irreducibeln Gleichungen

$$f_1(y) = y^n - a_1 y^{n-1} + \quad \pm a_n = 0$$
$$x^\nu - S_1(y) x^{\nu-1} + S_2(y) x^{\nu-2} - \quad + S_\nu = 0.$$

$y = \Theta_\iota(x)$ ist die Resolvente von ψ_ι und $f_1(y) = 0$ ist für alle ψ die Resolventengleichung.

Die oben erwähnte Bedingung für das Abbrechen des Schemas lautet nach dieser Auffassung, es müsse, soll das Schema abbrechen, für irgend ein ψ die Resolvente eines früheren ψ wieder erscheinen.

Was die φ betrifft, so haben sie mit den ihnen zugehörenden ψ_ι dieselben Resolventen und dieselbe Resolventengleichung und müssen daher durch Elimination aus zwei Gleichungen entstehen, d. h. sie sind in Determinantenform darstellbar.

Wir wissen, dass die Auflösung von $f_1 = 0$ die Auflösung aller Gleichungen $F_\iota = 0$ nach sich zieht. Vom substitutions-theoretischen Gesichtspunkte aus muss aber auch, da die F mit f zu derselben Gattung gehören, die Lösung einer Gleichung $F_\iota = 0$ die Auflösung von $f_1 = 0$ zur Folge haben, d. h. es müssen sich auch die Nullwerthe von f_1 rational durch diejenigen eines jeden F ausdrücken lassen. Es kommt nun darauf an, die rationalen Functionen der Nullwerthe der F, denen diejenigen von f_1 gleich zu setzen sind, zu ermitteln. Es wird nun gleichgiltig sein, welches F wir der Untersuchung zu Grunde legen, und wir betrachten daher F_1, wobei wir die Nullwerthe derselben durch

$$k_1,\ k_1',\ k_1'' \ \ldots k_1^{(n-1)}$$

bezeichnen. Bilden wir nun die Discriminante von F_1, so ist

$$\Delta = \begin{vmatrix} k_1^{n-1}\, k_1^{n-2}\,. & .1 \\ k_1'^{n-1}\, k_1'^{n-2}\,. & .1 \\ & \\ k_1^{(n-1)^{n-1}}\, k_1^{(n-1)^{n-2}} & .1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \vartheta(a)^{n-1}\, \vartheta(a)^{n-2} \ldots 1 \\ \vartheta(b)^{n-1}\, \vartheta(b)^{n-2} \quad .1 \\ \\ \vartheta(c)^{n-1}\, \vartheta(c)^{n-2} \quad .1 \end{vmatrix}^2, \qquad 29)$$

wenn man $f_2(x) : f_3(x) = \vartheta(x)$ setzt.

Multipliciren wir die Reihen der letzten Determinante resp. mit $\vartheta(a)$, $\vartheta(b)\ldots$, so erhalten wir:

$$\Delta = \frac{1}{\vartheta(a)^2 \ldots \vartheta(i)^2} \begin{vmatrix} \vartheta(a)^n\, \vartheta(a)^{n-1} \ldots \vartheta(a) \\ \vartheta(b)^n\, \vartheta(b)^{n-1} \ldots \vartheta(b) \\ \\ \vartheta(c)^n\, \vartheta(i)^{n-1} \ldots \vartheta(i) \end{vmatrix}^2$$

$$= \frac{R^2(f_1 f_2)}{R^2(f_1 f_3)} \begin{vmatrix} A_1^{(n)} a^{n-1} + \ + A_n^{(n)} \ldots A_1^{(1)} a^{n-1} + \ + A_n^{(1)} \\ A_1^{(n)} b^{n-1} + \ + A_n^{(n)}. \ \ . A_1^{(1)} b^{n-1} + \ + A_n^{(1)} \\ \\ A_1^{(n)} i^{n-1} + \ + A_n^{(n)} \quad . A_1^{(1)} i^{n-1} + \ + A_n^{(1)} \end{vmatrix}^2 \qquad 30)$$

$$= \frac{R^2(f_1 f_2)}{R^2(f_1 f_3)} \begin{vmatrix} A_1^{(1)} & A_2^{(1)} & . & . A_n^{(1)} \\ A_1^{(2)} & A_2^{(2)} & . & . A_n^{(2)} \\ & & & \\ A_1^{(n)} & A_2^{(n)} & . & . A_n^{(n)} \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} a^{n-1} & a^{n-2} & . & .1 \\ b^{n-1} & b^{n-2} & . & ..1 \\ & & & \\ i^{n-1} & i^{n-1} & . & .1 \end{vmatrix}^2$$

wobei die A die Coëfficienten der ganzen rationalen Functionen einer Wurzel von $f_1 = 0$ vom Grade $n-1$ sind, auf die man ϑ, $\vartheta^2, \ldots \vartheta^n$ zurückführen kann.

Der Voraussetzung nach verschwindet die Discriminante von F_1 nicht, folglich kann die Determinante

$$R = \begin{vmatrix} A_1^{(1)} A_2^{(1)} \ldots A_n^{(1)} \\ A_1^{(2)} A_2^{(2)} \ldots A_n^{(2)} \\ \\ A_1^{(n)} A_2^{(n)} \ldots A_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwinden. Man hat daher folgendes System von Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= A_1^{(1)} a^{n-1} + A_2^{(1)} a^{n-2} + \quad + A_n^{(1)} \\ k_1^2 &= A_1^{(2)} a^{n-1} + A_2^{(2)} a^{n-2} + \quad + A_n^{(2)} \\ & \\ k_1^n &= A_1^{(n)} a^{n-1} + A_2^{(n)} a^{n-2} + \quad + A_n^{(n)} \end{aligned}\right\}, \qquad 31)$$

aus welchem die Lösungen

$$\left.\begin{aligned} R.a &= R_{1n-1} k_1 \quad + R_{2n-1} k_1^2 \quad + \quad + R_{nn-1} k_1^n \\ R.b &= R_{1n-1} k_1' \quad + R_{2n-1} k_1'^2 \quad + \quad + R_{nn-1} k_1'^n \\ & \qquad \ldots \\ R.i &= R_{1n-1} k_1^{(n-1)} + R_{2n-1} k_1^{(n-1)^2} + \quad + R_{nn-1} k^{(n-1)^n} \end{aligned}\right\} \qquad 32)$$

folgen.

Nun sind wir im Stande, die Frage, ob das obige Schema 28) abbricht oder nicht, zu beantworten, indem wir nun zeigen können, dass schon die ersten n Functionen F nicht mehr von einander unabhängig sind.

Wir bezeichnen zu diesem Zwecke die Nullwerthe der F, resp. durch

$$\begin{array}{l} k_1,\ k'_1,\ k''_1 \ldots k_1^{(n-1)} \\ k_2,\ k'_2,\ k''_1 \quad .\ k_1^{(n-1)} \\ \\ k_n,\ k'_n,\ k''_n \quad .\ k_n^{(n-1)}. \end{array}$$

Angenommen, dass die n Functionen F von einander unabhängig sind, dann bestehen die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} k_1 = A_1^{(1)} a^{n-1} + A_2^{(1)} a^{n-2} + \quad + A_n^{(1)} \\ k_2 = B_1^{(1)} a^{n-1} + B_2^{(1)} a^{n-2} + \quad + B_n^{(1)} \\ k_3 = G_1^{(1)} a^{n-1} + G_2^{(1)} a^{n-2} + \quad + G_n^{(1)} \\ \\ k_n = J_1^{(1)} a^{n-1} + J_2^{(1)} a^{n-2} + \quad + J_n^{(1)} \end{array}\right\}, \qquad 33)$$

da die Determinante

$$D = \Sigma \pm A_1^{(1)} B_2^{(1)} \ldots J_n^{(1)}$$

nicht verschwinden darf.

Aus diesen und den ihnen entsprechenden Gleichungen für die gestrichenen k, erhält man die Lösungen

$$\left.\begin{array}{l} a = D_1 k_1 \quad + D_2 k_2 \quad + \quad + D_n k_n \\ b = D_1 k'_1 \quad + D_2 k'_2 \quad + \quad + D_n k_n \\ \\ c = D_1 k_1^{(n-1)} + D_2 k_2^{(n-1)} + \quad + D_n k_n^{(n-1)} \end{array}\right\}. \qquad 34)$$

Auch die Determinante

$$\vartheta = \begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \ldots & . k_n \\ k'_1 & k'_2 & k'_3 \ldots & . k'_n \\ \\ k_1^{(n-1)} & k_2^{(n-1)} & \ldots & k_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

darf der Voraussetzung nach nicht verschwinden, folglich kann man diese Gleichungen nach D auflösen.

Man findet also z. B.

$$D_1 \vartheta = \begin{vmatrix} a & k_2 \dots & . k_n \\ b & k'_2 . & . k'_n \\ & & \\ c & k_2^{(n-1)} & . k_n^{(n-1)} \end{vmatrix}, \qquad 35)$$

d. h. die Wurzeln von $f_1 = 0$ sind, von einem Factor abgesehen, den Wurzeln von $F_1 = 0$ gleich, was aus dem oben erwähnten Grunde nicht möglich ist. Wir müssen daraus schliessen, dass

$$\vartheta = 0$$

ist, oder, mit anderen Worten, dass schon die n ersten F nicht von einander unabhängig sind.

§. 4.

Der Kürze wegen führe ich folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{cases} R\{f_1, f_2 + \lambda f_3\} = r_1(\lambda) \\ R\{f_2, f_3 + \lambda f_1\} = r_2(\lambda) \\ R\{f_3, f_1 + \lambda f_2\} = r_3(\lambda) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_3^n R\{f_1, f_2 + \lambda f_3\}_{\lambda = -f_2 : f_3} = R_1(x) \\ f_3^n R\{f_2, f_3 + \lambda f_1\}_{\lambda = -f_2 : f_3} = R_2(x) \\ f_3^n R\{f_3, f_1 + \lambda f_2\}_{\lambda = -f_2 : f_3} = R_3(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1^n R\{f_1, f_2 + \lambda f_3\}_{\lambda = -f_3 : f_1} = \bar{R}_1(x) \\ f_1^n R\{f_2, f_3 + \lambda f_1\}_{\lambda = -f_3 : f_1} = \bar{R}_2(x) \\ f_1^n R\{f_3, f_1 + \lambda f_2\}_{\lambda = -f_3 : f_1} = \bar{R}_3(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2^n R\{f_1, f_2 + \lambda f_3\}_{\lambda = -f_1 : f_2} = \bar{\bar{R}}_1(x) \\ f_2^n R\{f_2, f_3 + \lambda f_1\}_{\lambda = -f_1 : f_2} = \bar{\bar{R}}_2(x) \\ f_2^n R\{f_3, f_1 + \lambda f_2\}_{\lambda = -f_1 : f_2} = \bar{\bar{R}}_3(x). \end{cases}$$

Zwischen diesen Formen bestehen folgende interessante Relationen:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{I.} & R\{R_1(x),\ R_2(x)+\mu.R_3(x)\}=\Pi_1^n(\mu) \\ \text{II.} & R\{\bar{R}_1(x),\ \bar{R}_2(x)+\mu.R_3(x)\}=\Pi_2^n(\mu) \\ \text{III.} & R\{\bar{\bar{R}}_1(x),\ \bar{\bar{R}}_2(x)+\mu.\bar{\bar{R}}_3(x)\}=\Pi_3^n(\mu) \end{array}\right\},\qquad 36)$$

wo Π_1, Π_2, Π_3 Functionen n^{ten} Grades in μ sind.

Der Beweis ist höchst einfach und es genügt, da er für alle drei Relationen derselbe ist, ihn für die erste zu führen.

Die Gleichung

$$R\{R_1(x),\ R_2(x)+\mu.R_3(x)\}=0$$

hat offenbar die Wurzeln

$$\begin{array}{l} R_2(a):R_3(a),\ R_2(\alpha'):R_3(\alpha')\ldots R_2(\alpha^{(n-1)}):R_3(\alpha^{(n-1)}) \\ R_2(b):R_3(b),\ R_2(\beta'):R_3(\beta').\quad .R_2(\beta^{(n-1)}):R_3(\beta^{(n-1)}) \\ \\ R_2(i):R_3(i),\ R_2(i)\quad R_3(i).\quad .R_2(i^{(n-1)})\quad R_3(i^{(n-1)}). \end{array}$$

Es ist aber z. B.

$$\begin{array}{l} R_2(a)=f_3^n R_2\{f_2, f_3+\lambda f_1\}_{\lambda=-f_2(a):f_3(a)} \\ R_3(a)=f_3^n R_3\{f_3, f_1+\lambda f_2\}_{\lambda=-f_2(a):f_3(a)} \end{array}$$

folglich ist auch

$$\frac{R_2(a)}{R_3(a)}=\frac{R_2\{f_2, f_3+\lambda f_1\}_{\lambda=-f_2(a):f_3(a)}}{R_3\{f_3, f_1+\lambda f_2\}_{\lambda=-f_2(a):f_3(a)}}.\qquad 37)$$

Weil aber die Relationen bestehen:

$$\begin{array}{l} f_2(a):f_3(a)=f_2(\alpha'):f_3(\alpha')=.\quad .=f_2(\alpha^{(n-1)}):f_3(\alpha^{(n-1)}) \\ f_2(b):f_3(b)=f_2(\beta'):f_3(\beta')=.\quad .=f_2(\beta^{(n-1)}):f_3(\beta^{(n-1)}) \\ \\ f_{\iota}(i)\quad f_3(i)=f_2(i)\quad f_3(i)=.\quad .=f_2(i^{(n-1)})\quad f_3(i^{(n-1)}), \end{array}$$

so folgt unmittelbar die Relation I.

Setzt man in I, II und III resp.

$$\mu = - R_2(x) : R_3(x)$$
$$\mu = - \bar{R}_2(x) : \bar{R}_3(x)$$
$$\mu = - \bar{\bar{R}}_2(x) : \bar{\bar{R}}_3(x),$$

so zerfallen Π_1, Π_2, Π_3 beziehungsweise in folgende Formen

$$\left.\begin{aligned} \Pi_1 &= \pi_1(x) \,.\, R_1(x) \\ \Pi_2 &= \pi_2(x) \,.\, R_2(x) \\ \Pi_3 &= \pi_3(x) \,.\, R_3(x) \end{aligned}\right\} . \tag{38}$$

Um die Formen π_1, π_2, π_3 durch möglichst niedrige Determinanten darstellen zu können, beweise ich folgende Relationen:

$$\left.\begin{aligned} & R_3^{n^2}(x) \,.\, R\{R_1(x),\ R_2(x) + \mu R_3(x)\}_{\mu = -R_2(x) \ \ R_3(x)} \\ = \ & R_3^n(f_2) \,.\, R\{r_1(\lambda),\ r_2(\lambda) + \mu r_3(\lambda)\}_{\mu = -R_2(\vartheta) \,:\, R_3(\vartheta)} \\ & \bar{R}_3^{n^2}(x) \,.\, R\{\bar{R}_1(x),\ \bar{R}_2(x) + \mu \bar{R}_3(x)\}_{\mu = -\bar{R}_2(x) \ \ \bar{R}_3(x)} \\ = \ & R_3^n(f_3) \,.\, R\{r_1(\lambda),\ r_2(\lambda) + \mu r_3(\lambda)\}_{\mu = -R_2(\vartheta_1) \ \ R_3(\vartheta_1)} \\ & \bar{\bar{R}}_3^{n^2}(x) \,.\, R\{\bar{\bar{R}}_1(x),\ \bar{\bar{R}}_2(x) + \mu \bar{\bar{R}}_3(x)\}_{\mu = -\bar{\bar{R}}_2(x) \,:\, \bar{\bar{R}}_3(x)} \\ = \ & R_3^n(f_1) \,.\, R\{r_1(\lambda),\ r_2(\lambda) + \mu r_3(\lambda)\}_{\mu = -R_2(\vartheta_2) \ \ R_3(\vartheta_2)} \end{aligned}\right. \tag{39}$$

wo ϑ, ϑ_1, ϑ_2 resp. $f_2' : f_3$, $f_3' : f_1$, $f_1' : f_2$ bedeuten.

Auch hier genügt es, die erste dieser Relationen zu beweisen. Den n Wurzeln der Gleichung

$$R\{r_1(\lambda),\ r_2(\lambda) + \mu r_3(\lambda)\} = 0$$

entsprechen folgende n Gleichungen

$$r_2(\lambda) + \mu_1 r_3(\lambda) = 0$$
$$r_2(\lambda) + \mu_2 r_3(\lambda) = 0$$
$$\cdots$$
$$r_2(\lambda) + \mu_n r_3(\lambda) = 0$$

oder

$$\left.\begin{aligned} r_2(\lambda) r_3(\vartheta(a)) - r_2(\vartheta(a)) r_3(\lambda) &= 0 \\ r_2(\lambda) r_3(\vartheta(b)) - r_2(\vartheta(b)) r_3(\lambda) &= 0 \\ &\cdots \\ r_2(\lambda) r_3(\vartheta(i)) - r_2(\vartheta(i)) r_3(\lambda) &= 0 \end{aligned}\right\} , \tag{40}$$

von denen eine jede eine gemeinschaftliche Wurzel mit der Gleichung $R_1(\lambda) = 0$ hat.

Setzt man in diesen Gleichungen

$$\lambda = -f_2 : f_3,$$

so gehen dieselben in folgende über:

$$\left.\begin{array}{l} R_2(x) R_3(a) - R_2(a) R_3(x) = 0 \\ R_2(x) B_3(b) - R_2(b) R_3(x) = 0 \\ \\ R_2(x) R_3(i) - R_2(i) R_3(x) = 0 \end{array}\right\}, \qquad 41)$$

d. h. in Gleichungen, welche der Gleichung

$$R\{R_1(x),\ R_2(x) + \mu R_3(x)\} = 0$$

entsprechen.

Nun ist die Gleichung

$$R\{r_1(\lambda),\ r_2(\lambda) + \mu r_3(\lambda)\} = 0$$

das Product der Gleichungen 40), sobald man in ihr

$$\mu = -r_2(\lambda) : r_3(\lambda)$$

setzt, sie muss daher auch in das Product der Gleichungen 41) übergehen, sobald man noch $\lambda = -f_2 : f_3 = \vartheta$ setzt, wodurch also die Relation in 39) bewiesen ist. Um nun $\pi_1(x)$ zu bilden, hat man nun die Resultate

$$R\left\{r_1(y),\ \frac{r_2(x) r_3(y) - r_2(y) r_3(x)}{x - y}\right\}$$

zu bilden und in dieser dann für x $\vartheta(x)$ zu setzen.

§. 5.

Für das Folgende ist die Beantwortung der Frage nöthig, ob es möglich ist, dass eine Combination von n Wurzeln, von denen je eine einer der Gleichungen 3) in §. 1 genügt, die Null-

werthe einer Function n^{ten} Grades darstellt, deren Coëfficienten rational sind, oder, mit anderen Worten, ob ψ einen rationalen Factor n^{ten} Grades enthalten kann.

Bezeichnen wir den in Rede stehenden Factor mit $\varphi(x)$ und die Wurzeln der Gleichung

$$\varphi(x) = 0$$

durch

$$a_1, b_1, c_1 \ldots i_1,$$

so kann man aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi \qquad &= 0 \\ f_2 + \lambda f_3 &= 0 \end{aligned}$$

die Gleichung

$$R\{\varphi, f_2 + \lambda f_3\} = 0 \tag{42}$$

bilden, welche offenbar mit

$$R\{f_1, f_2 + \lambda f_3\} = 0$$

identisch ist. Es werden demnach auch die n Gleichungen, welche der Gleichung 42) entsprechen, mit den Gleichungen 3) in §. 1 identisch sein. Am Schlusse des §. 1 ist gezeigt worden, dass jede dieser Gleichungen eine Verbindungslinie des Punktes $f_2 = 0, f_3 = 0$ mit dem Punkte, in welchem die Curve $F(f_1 f_2 f_3) = 0$ die Seite $f_1 = 0$ schneidet, darstellt und dass die Schnittpunkte dieser Verbindungslinie mit der Curve durch die Wurzeln eben dieser Gleichung gegeben sind. Es werden demnach beide Curven

$$\left.\begin{aligned} F(f_1 f_2 f_3) &= 0 \\ F(\varphi f_2 f_3) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

dieselben Verbindungslinien und dieselben Schnittpunkte mit denselben haben. Nun ist bekannt, dass die Gleichung einer Geraden, welche die Curve $F(f_1 f_2 f_3)$ schneidet, die Form hat

$$u_1 f_1 + u_2 f_2 + u_3 f_3 = 0$$

und dass die Schnittpunkte der Curve mit dieser Geraden durch Auflösung dieser Gleichung erhalten werden; es wird sich demnach die Gerade $\varphi(x) = 0$ in Bezug auf die Curve $F(f_1 f_2 f_3) = 0$ folgendermassen schreiben lassen:

$$\varphi = u_1 f_1 + u_2 f_2 + u_3 f_3 = 0.$$

Da nun φ eine lineare Verbindung der drei gegebenen Functionen ist, so ist ersichtlich, dass die beiden Curven 43) zusammenfallen müssen. Es folgt demnach aus den Gleichungssystemen

$$\begin{array}{ll} x_1 = f_1(x) & x_1 = \varphi(x) \\ x_2 = f_2(x) & x_2 = f_2(x) \\ x_3 = f_3(x) & x_3 = f_3(x), \end{array}$$

dass $\varphi(x)$ mit $f_1(x)$ für mehr als n Werthe von x übereinstimmen und sonach bekanntlich die Identität von φ und f_1. Damit ist nun dargethan, dass ψ keinen rationalen Factor n^{ten} Grades enthalten kann. Es lässt sich in gleicher Weise zeigen, dass ψ überhaupt keinen rationalen Factor enthält, falls die zu Grunde liegenden Formen allgemeine sind.

§. 6.

Wir führen nun folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} f_3^n R\{f_1, f_2 + \lambda f_3\}_{\lambda = -f_2 : f_3} &= \rho_1(x) \\ f_3^n R\{f_2, f_1 + \lambda f_3\}_{\lambda = -f_1 : f_3} &= \rho_2(x) \\ f_2^n R\{f_3, f_1 + \lambda f_2\}_{\lambda = -f_1 : f_2} &= \rho_3(x) \end{aligned}$$

und beweisen folgenden Satz:

Satz.

Die Curve

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \rho_1(x) \\ x_2 &= \rho_2(x) \\ x_3 &= \rho_3(x) \end{aligned}\right\} \qquad 44)$$

zerfällt in zwei oder mehrere Curven, von denen die eine die Curve

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= f_1(x) \\ x_2 &= f_2(x) \\ x_3 &= f_3(x) \end{aligned}\right\} \qquad 45)$$

ist, d. h. die Form

$$\mathfrak{F}(\rho_1 \rho_2 \rho_3),$$

welche man durch Elimination aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} u_1 \rho_1(x) + u_2 \rho_2(x) + u_3 \rho_3(x) &= 0 \\ v_1 \rho_1(x) + v_2 \rho_2(x) + v_3 \rho_3(x) &= 0 \end{aligned}$$

erhält, zerfällt in

$$\bar{F}(f_1 f_2 f_3) \cdot F(f_1 f_2 f_3),$$

wo $F(f_1 f_2 f_3)$ durch Elimination von x aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} u_1 f_1 + u_2 f_2 + u_3 f_3 &= 0 \\ v_1 f_1 + v_2 f_2 + v_3 f_3 &= 0 \end{aligned}$$

entsteht.

Beweis.

Vor Allem muss gezeigt werden, dass die Gleichungen 44) keine eigentliche Curve darstellen können.

Bezeichnet man durch

$$a^{(1)},\ b^{(1)};\ a^{(2)},\ b^{(2)};\ldots a^{(\nu)},\ b^{(\nu)}$$

$\left(\nu = \dfrac{(n-1)\ (n-2)}{2}\right)$ die den verschiedenen Doppelpunkten entsprechende Werthpaare von x und durch

$$x^{(1)},\ x^{(2)} \ldots x^{(mn)}$$

die Durchschnittspunkte der Curve vom Geschlechte $p = 0$ mit einer Curve m^{ter} Ordnung

$$\varphi(x_1 x_2 x_3) = 0,$$

so lautet nach Clebsch[1] das Abel'sche Theorem

$$\int_{\rho(\iota)}^{x(1)} \frac{a^{(\iota)} - b^{(\iota)}}{(a^{(\iota)} - x)(b^{(\iota)} - x)} dx + \int_{\rho(\iota)}^{x(2)} \frac{a^{(\iota)} - b^{(\iota)}}{(a^{(\iota)} - x)(b^{(\iota)} - x)} dx +$$

$$+ \int_{\rho(\iota)}^{x(mn)} \frac{a^{(\iota)} - b^{(\iota)}}{(a^{(\iota)} - x)(b^{(\iota)} - x)} dx = 0$$

oder, ebenfalls nach Clebsch,

$$\frac{a^{(\iota)} - x^{(1)}}{b^{(\iota)} - x^{(1)}} \cdot \frac{a^{(\iota)} - x^{(2)}}{b^{(\iota)} - x^{(2)}} \cdot \cdot \quad \frac{a^{(\iota)} - x^{(m.n)}}{b^{(\iota)} - x^{(m.n)}} = c^{(\iota)^m}$$

(wo $\iota = 1, 2 . \; . \nu$).

Diese ν Relationen sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass $m.n$ Punkte der Curve vom Geschlechte Null auf einer Curve m^{ter} Ordnung liegen.

Wenn nun die Gleichungen 44) eine neue Curve vom Geschlechte $p = 0$ und vom Grade n^2 darstellen, so muss diese offenbar ausser anderen auch alle Doppelpunkte der Curve 45) zu Doppelpunkten haben. Dies sieht man sofort ein, wenn man die Entstehung der Formen

$$\rho_1(x), \; \rho_2(x), \; \rho_3(x)$$

berücksichtigt. Diese entstehen nämlich aus

$$R\{f_1, f_2 + \lambda f_3\} = r_1(\lambda)$$
$$R\{f_2, f_1 + \lambda f_3\} = r_2(\lambda)$$
$$R\{f_3, f_1 + \lambda f_2\} = r_3(\lambda),$$

wenn man in diesen resp.

$$\lambda = -f_2 : f_3$$
$$\lambda = -f_1 : f_3$$
$$\lambda = -f_1 : f_2$$

setzt. Da aber für Doppelpunkte die Gleichungen bestehen:

---

[1] Crelle's Journal für Mathematik, Bd. 64, pag. 58.

$$f_1(a^{(\iota)}) = k f_1(b^{(\iota)})$$
$$f_2(a^{(\iota)}) = k f_2(b^{(\iota)})$$
$$f_3(a^{(\iota)}) = k f_3(b^{(\iota)}),$$

so bestehen auch für dieselben die Gleichungen

$$r_1(f_2(a^{(\iota)}) : f_3(a^{(\iota)})) = r_1(f_2(b^{(\iota)}) : f_3(b^{(\iota)}))$$
$$r_2(f_1(a^{(\iota)}) : f_3(a^{(\iota)})) = r_2(f_1(b^{(\iota)}) : f_3(b^{(\iota)}))$$
$$r_3(f_1(a^{(\iota)}) : f_2(a^{(\iota)})) = r_3(f_1(b^{(\iota)}) : f_2(b^{(\iota)})),$$

welche entwickelt in die folgende übergehen:

$$\rho_1(a^{(\iota)}) = k^n \rho_1(b^{(\iota)})$$
$$\rho_2(a^{(\iota)}) = k^n \rho_2(b^{(\iota)})$$
$$\rho_3(a^{(\iota)}) = k^n \rho_3(b^{(\iota)}).$$

Diese Relationen beweisen also, dass die Curve 44) mit der Curve 45) ν Doppelpunkte haben.

Suchen wir die n^3 Durchschnittspunkte der Curve 44) mit der Curve 45), so finden wir nach dem oben Vorausgeschickten, dass die jenen entsprechenden Parameter durch folgende Relationen gegeben sind:

$$\frac{a^{(\iota)} - x^{(1)}}{b^{(\iota)} - x^{(1)}} \cdot \frac{a^{(\iota)} - x^{(2)}}{b^{(\iota)} - x^{(2)}} \cdot \frac{a^{(\iota)} - x^{(3)}}{b^{(\iota)} - x^{(3)}} \cdot \quad \cdot \frac{a^{(\iota)} - x^{(n^3)}}{b^{(\iota)} - x^{(n^3)}} = (k_\iota^n)^{n^2}.$$

Dass diese Relationen nicht bestehen können, ist evident, da die Factoren auf der linken Seite zum Theile unbestimmt werden.

Doch kann man den Beweis noch in anderer Weise führen, indem man nicht nur auf die Entstehung von

$$\rho_1(x),\ \rho_2(x),\ \rho_3(x),$$

sondern auch auf ihre Bedeutung Rücksicht nimmt.

Würden die Gleichungen 44) eine neue Curve darstellen, so würden nach den Auseinandersetzungen in §. 1 die Durchschnittspunkte dieser Curve mit den Fundamentallinien durch die Gleichungen

$$\rho_1(x) = 0$$
$$\rho_2(x) = 0$$
$$\rho_3(x) = 0$$

gegeben sein. Die Wurzeln dieser Gleichungen würden also Punkten auf geraden Linien entsprechen, was nach §. 1 nicht der Fall sein kann, da diese Wurzeln den Durchschnittspunkten der Curve $F(f_1 f_2 f_3)=0$ mit den Geraden entsprechen, welche von den Ecken des Fundamentaldreieckes ausgehen und die diesen gegenüberliegenden Seiten in den Punkten der Curve schneiden.

Da es sonach feststeht, dass die Gleichungen 44) keine eigentliche Curve darstellen können, so fragt es sich, was aus der Form

$$\mathfrak{F}(\rho_1(x),\ \rho_2(x),\ \rho_3(x))$$

wird. Es können nun drei Fälle möglich sein:

a) die Form verschwindet identisch;

b) die Form ist constant;

c) die Form zerfällt in mehrere Factoren.

Dass die Form nicht identisch verschwinden kann, ersieht man aus folgender Überlegung. Aus dem identischen Verschwinden von $\mathfrak{F}(\rho_1 \rho_2 \rho_3)$ würde folgen, dass die Formen

$$\rho_1(x),\ \rho_2(x),\ \rho_3(x)$$

einen Factor gemeinschaftlich haben. Die Unmöglichkeit dieser Annahme leuchtet sofort ein. Gesetzt nämlich, sie würden einen Factor gemein haben, so würde derselbe eine ganze rationale Function sein, es würde demnach folgen, das $\psi_1(x)$ einen rationalen Factor enthält, was nach §. 5 nicht stattfinden kann.

Was den Fall *b)* betrifft, so setzt derselbe voraus, dass zwischen den Functionen

$$\rho_1(x),\ \rho_2(x),\ \rho_3(x)$$

die linearen Relationen besteht

$$\alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 + \alpha_3 \rho_3 = 0, \tag{46)}$$

denn nur unter dieser Voraussetzung gehen nämlich die Gleichungen

$$u_1 \rho_1(x) + u_2 \rho_2(x) + u_3 \rho_3(x) = 0$$
$$v_1 \rho_1(x) + v_2 \rho_2(x) + v_3 \rho_3(x) = 0$$

in

$$\lambda_1 \rho_1(x) + \lambda_2 \rho_2(x) = 0$$
$$\mu_1 \rho_1(x) + \mu_2 \rho_2(x) = 0$$

über und die Resultante $f(\rho_1 \rho_2 \rho_3)$ in folgende

$$f(\rho_1 \rho_2 \rho_3) = (\lambda \mu)^{\nu} . \mathrm{R}(\rho_1 \rho_2).$$

Es ist aber nach §. 1

$$\rho_1(x) = F(0 f_2 f_3)$$
$$\rho_2(x) = F(f_1 0 f_3)$$
$$\rho_3(x) = F(f_1 f_2 0)$$

und demgemäss lässt sich die Form $F(f_1 f_2 f_3)$ wie folgt schreiben:

$$F(f_1 f_2 f_3) = (A f_1^n + B f_2^n + C f_3^n) + k_1 F(0 f_2 f_3) + k_2 F(f_1 0 f_3) + k_3 F(f_1 f_2 0) + \Sigma D_{ik\lambda} f_1^i f_2^k f_3^{\lambda}.$$

Wenn nun die Relation 46) zwischen den ρ_ι bestünde, so würde zum Beispiele folgen, dass $F(0 f_2 f_3) = \rho_1(x)$ sich durch $F(f_1 0 f_3) = \rho_2(x)$ und $F(f_1 f_2 0) = \rho_3(x)$ ausdrücken lässt und dass sonach in der Form $F(f_1 f_2 f_3)$ alle Glieder fehlen, welche die Factoren $f_2^i f_3^k$ enthalten, d. h. dass die Determinanten, welche als Coëfficienten dieser Glieder auftreten, verschwinden, was bei der Allgemeinheit der Formen f_1, f_2, f_3, wie wir sie voraussetzten, nicht der Fall sein kann.

Es bleibt also nur die einzige Möglichkeit *c)* über, dass die Curve $\mathfrak{F}(\rho_1 \rho_2 \rho_3) = 0$ in mehrere Curven zerfällt.

Da nun eine dieser Curven sich auf das Fundamentaldreieck bezieht, dessen Seiten bez. $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ sind, wie es aus den obigen Betrachtungen erhellt, so folgt daraus die Behauptung des Satzes.

§. 7.

Setzt man mit Berücksichtigung des Umstandes, dass mit $f_1 = 0$ auch $\rho_1 = 0$ wird in $\mathfrak{F}(\rho_1 \rho_2 \rho_3)$ $f_1 = 0$, so geht $\mathfrak{F}(\rho_1 \rho_2 \rho_3)$ in $R\{\rho_1(x), \rho_2(x) + \mu \rho_3(x)\}$ über. Nach dem eben bewiesenen Satze muss nun diese Form einen rationalen Factor n^{ten} Grades in μ enthalten. Dies ist in der That der Fall, wie folgender Satz lehrt.

Satz.

Die Gleichung

$$R\{\rho_1(x),\ \rho_2(x)+\mu\rho_3(x)\}=0 \tag{47}$$

hat die n^{ten} Potenzen der Wurzeln der Gleichung

$$R\{f_1,\ f_3+\lambda f_2\}=0$$

multiplicirt mit dem Factor

$$R(f_1 f_2):R(f_1 f_3)$$

zu Wurzeln.

Die Methode des Beweises ist die schon oft in diesem Aufsatze gebrauchte.

Es sind nämlich die Wurzeln der Gleichung 47)

$$\rho_2(a):\rho_3(a);\ \rho_2(b):\rho_3(b).\ \ .\rho_2(i):\rho_3(i) \text{ u. s. w.}$$

Ferner ist

$$\rho_2(x)=f_3^n(x)R\{f_2,f_1+\lambda f_3\}_{\lambda=-f_1(x):f_3(x)}$$
$$\rho_3(x)=f_2^n(x)R\{f_3,f_1+\lambda f_2\}_{\lambda=-f_1(x):f_2(x)}.$$

Setzt man für x die Wurzeln von $f_1=0$, so gehen diese Gleichungen über in

$$\rho_2(a)=f_3^n(a).R(f_2 f_1)$$
$$\rho_3(a)=f_2^n(a).R(f_3 f_1)$$

u. s. w., folglich ist

$$\rho_2(a):\rho_3(a)=\left(\frac{f_3(a)}{f_2(a)}\right)^n.\frac{R(f_1 f_2)}{R(f_1 f_3)} \tag{48}$$

u. s. w., und somit ist der Satz bewiesen.

§. 8.

Damit

$$f_2(a):f_3(a)=f_2(b):f_3(b)$$

sei, ist nothwendig, dass

$$R\{f_1,\ f_2+\lambda f_3\}=0$$

zwei zusammenfallende Wurzeln hat, d. h. dass die Discriminante dieser Gleichung verschwindet. Ich will nun den Fall untersuchen, dass diese Gleichung eine vollständige Potenz ist, in welchem Falle die Gleichungen 3) in §. 1 in eine zusammenfallen. Setzen wir

$$R\{f_1, f_2 + \lambda f_3\} = A(\lambda - \pi)^n,$$

so ist π eine rationale Grösse und wir erhalten

$$\pi = f_2(a) : f_3(a) = f_2(b) : f_3(b) = \cdot \quad \cdot = f_2(i) : f_3(i).$$

Verwandelt man diese Brüche nach der bekannten Methode in rationale ganze Functionen, so bekommt man eine Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, welche n Wurzeln hat, was nicht möglich ist. Wir müssen daraus schliessen, entweder dass die gedachte Umwandlung dieser Brüche in diesem Falle überhaupt nicht möglich ist, oder dass die Brüche constant, d. h. von den Wurzeln unabhängig sind. Das letztere ist der Fall, wie sich zeigt, wenn man die Umwandlung nach der Methode von Hermite vornimmt. Setzt man nämlich

$$\begin{aligned}
f_2(a) : f_3(a) &= \nu_1 a^{n-1} + \nu_2 a^{n-2} + \quad + \nu_n \\
f_2(b) : f_3(b) &= \nu_1 b^{n-1} + \nu_2 b^{n-2} + \quad + \nu_n \\
\\
f_2(i) : f_3(i) &= \nu_1 i^{n-1} + \nu_2 i^{n-2} + \quad + \nu_n
\end{aligned}$$

und bestimmt ν_i aus diesen Gleichungen, so ist

$$\nu_\iota = \begin{vmatrix} a^{n-1} . a^{n-i+1} f_2(a) : f_3(a) . a^{n-\iota-1} \\ b^{n-1} . b^{n-i+1} f_2(b) : f_3(b) . b^{n-\iota-1} \\ \\ i^{n-1} . i^{n-\iota+1} f_2(i) : f_3(i) . i^{n-\iota-1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a^{n-1}\ a^{n-2} . & .1 \\ b^{n-1}\ b^{n-2} . & .1 \\ \\ i^{n-1}\ i^{n-2} & .1 \end{vmatrix}.$$

In dem Zähler dieses Ausdruckes sind zwei Colonnen gleich, folglich verschwindet er identisch. Nur in dem Ausdrucke für ν_n ist dies nicht der Fall, denn dieser ist gleich π.

Bedenkt man, dass

$$^1 f_2(a) : f_3(a) = \Phi(a) = \frac{1}{R(f_1 f_3)} \{\Sigma A_\iota R_\iota a^{n-1} + \Sigma B_\iota R_\iota a^{n-2} + \\ + \Sigma N_\iota R_\iota\} = \pi \text{ ist,}$$

[1] Über die Bedeutung dieser Formel siehe die oben citirte Arbeit „Über eine Classe von Abel'schen Gleichungen."

so folgt, dass, damit

$$R\{f_1, f_2 + \lambda f_3\}$$

eine vollständige Potenz sei, die Bedingungen nothwendig sind

$$\Sigma A_\iota R_\iota = 0$$
$$\Sigma B_\iota R_\iota = 0$$

$$\Sigma N_\iota R_\iota = 0.$$

Zugleich lernen wir auch das π kennen, denn es ist

$$\pi = \frac{1}{R(f_1 f_2)} \Sigma M_\iota R_\iota. \tag{49}$$

Nun ist aber auch

$$\pi = \frac{f_2(a) + f_2(b) + \quad + f_2(\iota)}{f_3(a) + f_3(b) + \quad + f_3(\iota)} = \frac{f_2(a)}{f_3(a)} = .$$

was wir auch so schreiben können:

$$\pi = \frac{b_0 S_n + b_1 S_{n-1} + \quad + b_{n-1} S_1 + n b_n}{c_0 S_n + c_1 S_{n-1} + \quad + c_{n-1} S_1 + n c_n},$$

wo S_i die Summe der Potenzen der Wurzeln bedeutet. Wir erhalten daher die interessante Formel

$$\frac{\Sigma N_\iota R_\iota}{R(f_1 f_3)} = \frac{b_0 S_n + b_1 S_{n-1} + \quad + b_{n-1} S_1 + n b_n}{c_0 S_n + c_1 S_{n-1} + \quad + c_{n-1} S_1 + n c_n} \tag{50}$$